1. 设直线

① 直线过定点 $(0,1)$ 正设

$y=kx+1$. 联立消 y 留 x.

② 直线过定点 $(1,0)$ 反设

$x=ty+1$. 联立消 x, 留 y.

不包括水平线

③ 直线不过定点

$y=kx+m$.

④ 与抛物线 $y^2=2px$ 反设

设 $x=ty+m$

⑤ 与抛物线 $x^2=2py$. 正设

设 $y=kx+m$

2. 直线过定点在曲线内部.

一定有两个交点.

不用计算 $\Delta>0$.

直线过定点在曲线外部.

需要计算 $\Delta>0$.

3. 硬解定理：韦达，Δ，弦长、面积的不等方法.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. \\ Ax+By+C=0\end{cases}$$

联立消 y $(a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2ACx+a^2(c^2-b^2B^2)=0$.

$$x_1+x_2=\frac{-2a^2AC}{a^2A^2+b^2B^2} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{a^2(c^2-b^2B^2)}{a^2A^2+b^2B^2}$$

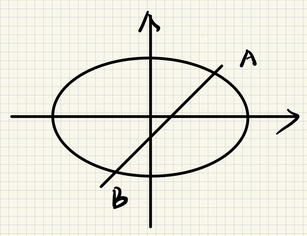
先写韦达，再写方程

$$y_1+y_2=\frac{-2b^2BC}{a^2A^2+b^2B^2} \qquad y_1\cdot y_2=\frac{b^2(c^2-a^2A^2)}{a^2A^2+b^2B^2}$$

$$x_1y_1+x_2y_2=\frac{2a^2b^2AB}{a^2A+b^2B}$$

$$\begin{cases}\text{联立消 } y \text{ 留 } x: \ \Delta x=4a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-c^2) \\ \text{联立消 } x \text{ 留 } y: \ \Delta y=4a^2b^2A^2(a^2A^2+bB^2-c^2)\end{cases}$$

4. 弦长公式



$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2\left[1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{(1+k^2)}\,|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$$

$$=(1+k^2)\left[(-\frac{B'}{A'})^2-\frac{4C'}{A'}\right]=\sqrt{(1+k^2)\cdot\frac{A}{A'^2}}$$

↳ 韦达定理分母

$$|AB|=\sqrt{(1+k^2)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}$$

第8讲：直线与圆锥曲线的位置关系

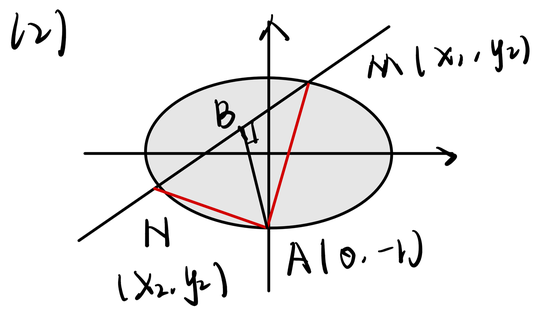
1. 已知椭圆的一个顶点为 $A(0,-1)$，焦点在 x 轴上．若右焦点到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离为 3．

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设椭圆与直线 $y=kx+m(k\neq 0)$ 相交于不同的两点 M、N．当 $|AM|=|AN|$ 时，求 m 的取值范围．

(1) $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)



设 MN 中点为 B

$\because |AM|=|AN|$

$\therefore AB\perp MN$

$k_{AB}\cdot k=-1$

$\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+1}{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot k=-1$

$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ kx-y+m=0\end{cases}$ 消 y.

$(1+3k^2)x^2+6kmx+3(m^2-1)=0$. (没用)

$x_1+x_2=\frac{-2\times 3km}{3k^2+1}$

$x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$

$y_1+y_2=\frac{2m}{3k^2+1}$

$\Delta=4\times 3\times 1\times 1\times(3m^2+1-m^2)>0$ ②

即 $\frac{y_1+y_2+2}{x_1+x_2}\cdot k=-1$. ①

翻译题目

代入① $\frac{\frac{2m}{3k^2+1}+2}{\frac{3(m^2-1)}{3k+1}}=-1\Rightarrow 3k^2+1=2m$

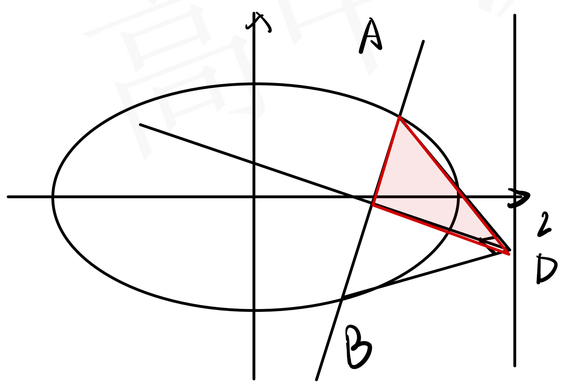
代入②

$2m-m^2>0$ $m\in(0,2)$

2. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过三点 $(0,1)$，$(1,1)$，$(-\sqrt{2},0)$ 中的两点．

(1) 求 E 的方程；

(2) 过 E 的右焦点的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，在直线 $x=2$ 上是否存在一点 D，使得 $\triangle ABD$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形？若存在，求出 l 的方程；若不存在，请说明理由．



若过 $(0,1)(-\sqrt{2},0)$

$a=\sqrt{2}$，$b=1$ $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ✓

若过 $(1,1)$

$a=\sqrt{2}$，$b^2=2$ 舍.

反设 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ x-ty-1=0\end{cases}$ 联立消 x，留 y.

$(2+t^2)y^2+2ty-1=0$.

$y_1+y_2=\frac{-2t}{2+t^2}$ $y_1\cdot y_2=\frac{1\cdot(1-2)}{2+t^2}$

$x_1+x_2=ty_1+1+ty_2+1=\frac{4}{2+t^2}$

无需算 $\Delta=4\cdot 2\cdot 1\cdot 1(2+t^2-1)=8(t^2+1)$

AB 中点 C $\left(\frac{2}{2+t^2},\frac{-t}{2+t^2}\right)$

$|AB|=\sqrt{(1+t^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{(1+t^2)\frac{8(t^2+1)}{(2+t^2)^2}}=\frac{2\sqrt{2}(t^2+1)}{t^2+2}$

直线 CD：

$|CD|=\sqrt{(1+t^2)}\,|x_D-x_C|$

$=\sqrt{1+t^2}\left|2-\frac{2}{2+t^2}\right|$

$=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{2t^2+2}{2+t^2}$

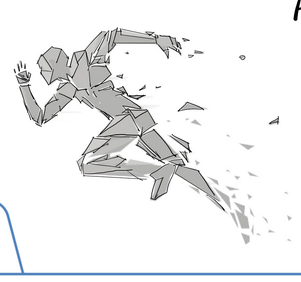
$\because \triangle ABD$ 为等腰 Rt $\triangle$

$\therefore AC=DC$.

$\frac{2\sqrt{2}(t^2+1)}{t^2+2}=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{2(t^2+1)}{2+t^2}$

$1+t^2=\frac{1}{2}$ 无解.

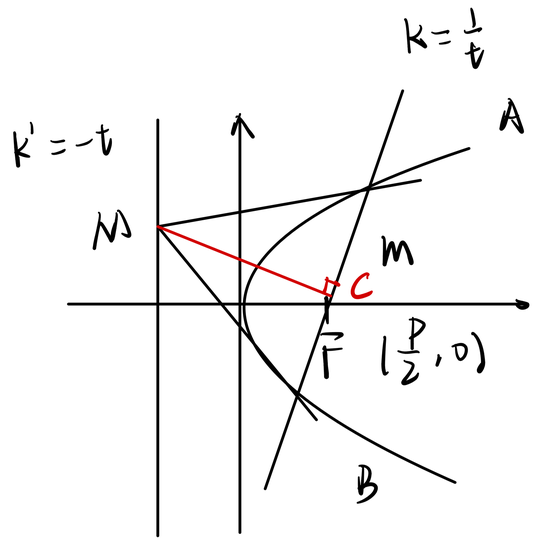
$\therefore$ 不存在.



等腰：中垂线 CD

1/2 AB = CD

3. 已知抛物线 $C: y^2=2px$ 的 $(p>0)$ 焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线 m 交抛物线 C 于 A, B 两点，若在直线 l 上存在一点 M，使 $\triangle MAB$ 是等边三角形，求直线 m 的斜率.



等边： $MC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$MC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

反设.

设 $AB: x=ty+\frac{p}{2}$

$y^2=2px=2p(ty+p)$

$\Rightarrow y^2-2pty-p^2=0.$

$y_1+y_2=2pt \quad y_1\cdot y_2=-p^2$

$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+p=2pt^2+p.$

$C\left(pt^2+\frac{p}{2}, pt\right)$

$|AB|=AF+BF=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}$

$=x_1+x_2+p=2pt^2+2p$

$MC=\sqrt{1+t^2}\,|x_m-x_C|$

$=\sqrt{1+t^2}\,|pt^2+p|$

$=\sqrt{1+t^2}\,p(t^2+1)$

$t^2+1=3.$

$t=\pm\sqrt{2} \qquad k=\frac{1}{t}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

反设 AB

↓

韦达定理求 x_1+x_2

y_1+y_2

↓

中点 C

↓

斜率求 MC

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，经过点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$，其离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设直线 $l: y=kx+m\left(|k|\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，以线段 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OAPB$，其中顶点 P 在椭圆 C 上，O 为坐标原点. 求 $|OP|$ 的取值范围.

$k\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

对角线相互平分.

(1) $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a}}=\frac{1}{2}$

$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$

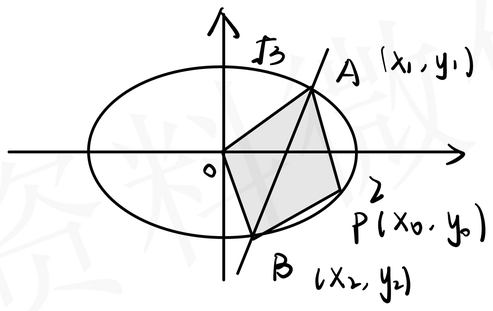
将 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 代入 C.

$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1.$

$\therefore \begin{cases} a^2=4. \\ b^2=3 \end{cases}$

$\therefore C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)



$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \\ kx-y+m=0 \end{cases} \Rightarrow (4k^2+3)x^2+8kmx+4(m^2-3)=0.$

$x_1+x_2=\frac{-2\times 4km}{4k^2+3}=\frac{-8km}{4k^2+3} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{4(m^2-3)}{4k^2+3}$

$y_1+y_2=\frac{+2\times 3m}{4k^2+3}=\frac{6m}{4k^2+3} \qquad y_1\cdot y_2=\frac{3(m^2-4k^2)}{4k^2+3}$

$(kx_1+m)+(kx_2+m)$

$\Delta=4\times 4\times 3\times 1\,(4k^2+3-m^2)>0.$

$x_0=x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+3}$

$y_0=y_1+y_2=\frac{6m}{4k^2+3}$

$\frac{16k^2m^2}{(4k^2+3)^2}+\frac{36m^2}{(4k^2+3)^2}=1.$

$\boxed{4m^2=4k^2+3.}$

$|OP|^2=x_0^2+y_0^2$

$=\frac{16k^2+9}{4m^2}=\frac{16m^2-3}{4m^2}$

$=4-\frac{3}{4m^2} \in\left[3, \frac{13}{4}\right]$

$3m^2>0 \qquad k^2\in\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$m\neq 0$

$m^2\in\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

$|OP|\in\left[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right]$

高中课程资料微信：



5. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 B，Q 为抛物线 $y^2=12x$ 的焦点，且 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{QB}=0$，$2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{QF_1}=\vec{0}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 过定点 $P(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点（M 在 P，N 之间），设直线 l 的斜率为 $k(k>0)$，在 x 轴上是否存在点 $A(m,0)$，使得以 AM，AN 为邻边的平行四边形为菱形？若存在，求出实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

(1) $(c,b)\cdot(-3,b)=0 \Rightarrow b^2=3c$

$(4c,0)+(-c-3,0)=\vec{0} \Rightarrow c=1$.

$b^2=3$. $a^2=4$.

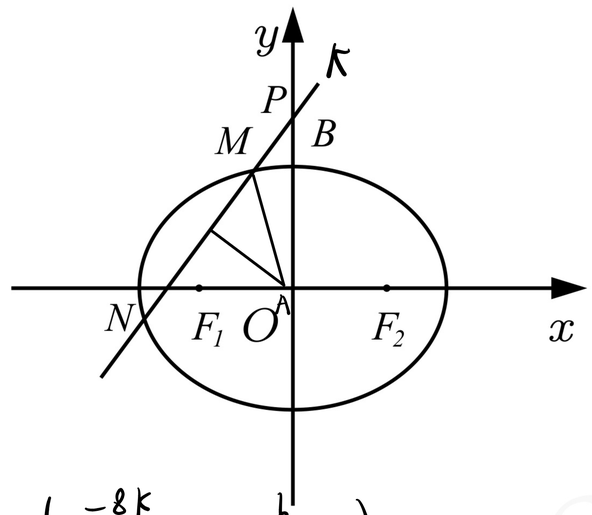
$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ kx-y+2=0\end{cases}$ 联立

$x_1+x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+3}$ $\quad x_1\cdot x_2=\dfrac{4(4-3)}{4k^2+3}$

$y_1+y_2=(kx_1+2)+(kx_2+2)=\dfrac{12}{4k^2+3}$

$\Delta=4\cdot4\cdot3(4k^2+3-4)>0 \Rightarrow k^2>\dfrac{1}{4}$



MN 中点 $P\left(\dfrac{-8k}{4k^2+3},\dfrac{6}{4k^2+3}\right)$

$k_{AP}\cdot k=-1$

$\dfrac{\dfrac{6}{4k^2+3}}{\dfrac{-8k}{4k^2+3}-m}\times k=-1$.

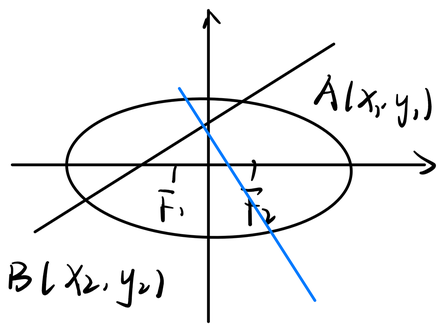
$\dfrac{6k}{4k^2+3}=m+\dfrac{8k}{4k^2+3}$

6. (2010 浙江) 已知 $m>1$，直线 $l:x-my-\dfrac{m^2}{2}=0$，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{m^2}+y^2=1$，F_1,F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点.

(Ⅰ) 当直线 l 过右焦点 F_2 时，求直线 l 的方程；

(Ⅱ) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，ΔAF_1F_2，ΔBF_1F_2 的重心分别为 G,H. 若原点 O 在以线段 GH 为直径的圆内，求实数 m 的取值范围.

(2)



G 为 ΔAF_1F_2 的重心

$G\left(\dfrac{x_1}{3},\dfrac{y_1}{3}\right)$

同理 $H\left(\dfrac{x_2}{3},\dfrac{y_2}{3}\right)$.

$\angle O$ 在以 GH 为直径的圆内

高中课程资料微信：NSJ2026

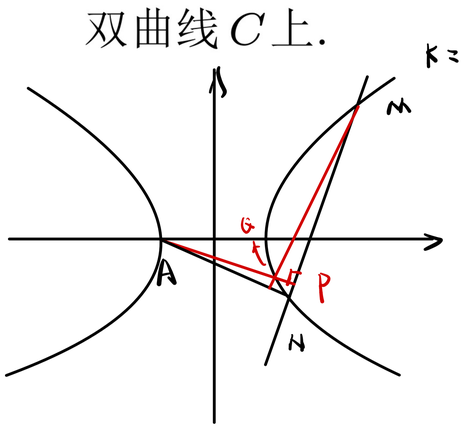
7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 $\sqrt{2}$，直线 $l_1:y=2x+4\sqrt{3}$ 与双曲线 C 仅有一个公共点.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 设双曲线 C 的左顶点为 A，直线 l_2 平行于 l_1，且交双曲线 C 于 M,N 两点，求证：$\triangle AMN$ 的垂心在双曲线 C 上.

非对称韦达定理

(1)



设 $AP\perp MN$，交双曲线右支于 Q.

直线 AP：$y=-\frac{1}{2}(x+4)$.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1\\ y=-\frac{1}{2}x-2\end{cases}\Rightarrow x^2-(\tfrac{1}{2}x+2)^2=16$$

($1x=-2y-4$ 无分数)

$Q\left(\frac{20}{3},-\frac{16}{3}\right)$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1\\ 2x-y+m=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$x_1+x_2=\frac{-2\times16\times2m}{64-16}=-\frac{4}{3}m,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{16(m^2-16)}{48}=\frac{m^2-16}{3}$$

证明 Q 为垂心

$$k_{MQ}\cdot k_{AN}=\frac{y_1+\frac{16}{3}}{x_1-\frac{20}{3}}\cdot\frac{y_2}{x_2+4}$$

$$=\frac{(2x_1+m+\frac{16}{3})(2x_2+m)}{x_1x_2+4x_1-\frac{20}{3}x_2+\frac{80}{3}}$$

$$=\frac{4x_1x_2+2mx_1+2mx_2+m^2+\frac{32}{3}x_2+\frac{16}{3}m}{x_1x_2-4(x_1+x_2)-\frac{8}{3}x_2+\frac{80}{3}}$$

$$=\frac{12x_1x_2+6m(x_1+x_2)+3m^2+16m+32x_2}{3x_1x_2-12(x_1+x_2)+80-8x_2}$$

$$=\frac{4m^2-24-8m^2+3m^2+16m+32x_2}{m^2+64+16m+80-8x_2}$$

$$=\frac{-m^2+16m+32x_2+64}{m^2-16m-32x_2-64}=-1.$$

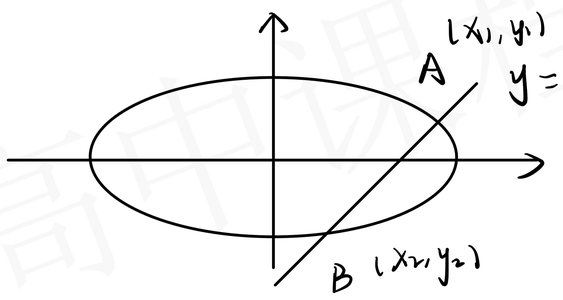
$\therefore MQ\perp AN$

8. (2018 北京) 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$. 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A,B.

(1) 求椭圆 M 的方程；

(2) 若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

(1)



$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\qquad c=\sqrt{2}$$

$$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}.$$

$$b=1.$$

$\therefore M:\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1.$

(2) $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ x-y+m=0\end{cases}$ 联立

$$\Delta=4\cdot3\cdot1\cdot(4-m^2)>0.$$

$\Rightarrow m^2<4.$

$$x_1+x_2=\frac{-2\times3\times m}{3+1}=-\frac{3m}{2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{3(m^2-1)}{4}$$

$$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$$

$$=\sqrt{2\cdot\frac{12(4-m^2)}{4^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{4-m^2}\le\sqrt{6}$$

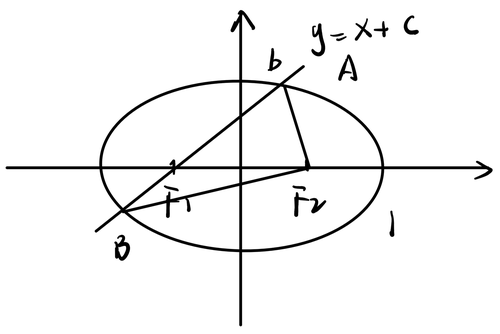
$m=0$ 时取等

高中课程资料微信：NS12026

9. (2010 新课标) 设 F_1,F_2 分别是椭圆 $E: x^2+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点，且 $|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$ 成等差数列.

(Ⅰ) 求 $|AB|$；

(Ⅱ) 若直线 l 的斜率为 1，求 b 的值.



(1) $|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$

$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a=3|AB|$

$|AB|=\frac{4a}{3}=\frac{4}{3}$.

(2) 设 $AB: y=x+c$.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x-y+c=0.\end{cases}$$

$(1+b^2)x^2+2cx+c^2-b^2=0.$

$x_1+x_2=\frac{-2c}{1+b^2}$

$x_1\cdot x_2=\frac{1(c^2-b^2)}{1+b^2}$

$|AB|=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$=\sqrt{2\ \frac{4\cdot 1\cdot b^2(1+b^2-c^2)}{(1+b^2)^2}}$

$=\frac{4b^2}{1+b^2}=\frac{4}{3}$ $\quad b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Delta x=4a^2b^2B^2(\text{分母}-c^2)$

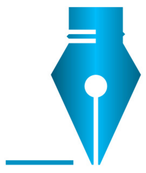
高中课程资料微信：NSJ2026



课堂总结

高中课程资料微信：NSJ2026





作业

1. 已知中心在原点的椭圆 C 的左焦点 $F(-\sqrt{3},0)$，右顶点 $A(2,0)$.

   (1) 求椭圆 C 的标准方程；

   (2) 斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，求弦长 $|AB|$ 的最大值及此时 l 的直线方程.

高中课程资料微信：NSJ2026

